TANGRAM

RNDr. JAROSLAVA BRINCKOVÁ

DIDAKTICKÁ HRA V GEOMETRII

Bratislava

DONY

Niekoľko slov na úvod

Realitu života okolo seba poznávame rôznymi spôsobmi. Väčšinu formatívnych procesov realizujeme v činnostiach. Učíme sa cez hru, učíme sa tým, že niečo skúšame (pokus - omyl), učíme sa tým, že niečo modelujeme, napodobňujeme činnosť nejakého systému, učíme sa tým, že o veciach a procesoch diskutujeme a porovnávame ich. Kuřina v práci [5] píše: „Človek dokáže vytvoriť čokoľvek, čo si dokáže predstaviť. Ohraničuje ho v rámci jeho intelektu iba to, ako tvorivo myslí."

Žijeme a pracujeme v trojdimenzionálnom priestore, ale väčšina úloh, ktoré sa učíme riešiť v geometrii, sa realizuje v rovine (najčastejšie na liste papiera). Zvykáme si na dvojrozmerný svet. Tu nás naša predstavivosť nesklame. Keď máme riešiť priestorovú situáciu, začína naša predstavivosť krívať. Výšku domu odhadneme horšie, ako jeho šírku, či dĺžku. Výšku letiaceho oblaku, alebo lietadla, neskúsený pozorovateľ nedokáže určiť ani približne. Pritom dobrá priestorová predstavivosť je potrebná v živote. Napríklad pri orientácii v meste, v lese, v obchodnom dome (schopnosť vrátiť sa po prejdenej ceste späť), pri nastavovaní súčiastok na obrábacom stroji, pri premiestňovaní nábytku v byte a podobne.

Tretí rozmer poznávame pomocou akomodácie a konvergencie oka. Oba tieto vnemy sú svalové a celkom odlišné od vizuálnych vnemov, ktoré nám umožňujú vidieť prvý a druhý rozmer. Pre svalovú činnosť ani pre priestorové vzťahy človek nemá doposiaľ vyvinutú intuíciu. Ale vytrvalým a cieľavedomým riešením stereometrických úloh môže získať dostatočnú zásobu skúseností s priestorovými javmi.

Moderná pedagogika zdôrazňuje, že je potrebné stále vo väčšej miere umožniť žiakom také činnosti, ktoré vychádzajú z ich vnútornej motivácie a sú, pokiaľ je to možné, spojené s priamym poznávaním javov a dejov. K takýmto činnostiam patria aj didaktické hry.Sú to hry podľa pravidiel, ktoré spĺňajú didaktický cieľ. Pri rozvíjaní priestorovej predstavivosti sa uplatňujú predovšetkým rôzne stavebnice a solitéry, pomocou ktorých nadobúdajú žiaci skúsenosti s priestorovými javmi, pričom nenásilnou formou vyriešia veľa úloh a nepovažujú to za záťaž.

Predkladaná publikácia je určená učiteľom matematiky, vedúcim krúžkov a rodičom, ktorí kupujú deťom čínsky hlavolam Tangram. Poukazuje na možnosti využitia tejto hry pri rozvíjaní priestorovej predstavivosti žiaka vo vyučovaní jednotlivých tematických celkov geometrie už od 4. ročníka ZŠ.

Najväčšiu úlohu pri tejto hre zohráva um žiaka a jeho schopnosť vidieť. Hra dáva priestor pre uplatnenie tvorivosti, fantázie a originality. Vplýva na viac psychických oblastí človeka a pôsobí pozitívne aj vo výchovnej sfére. Cvičí zmysel pre cit a geometrické obrazce. Schopnosť riešenia úloh s Tangramom narastá v závislosti od veku žiaka a najvyššia je podľa psychológov vo veku 16 rokov. Môžeme ju preto zaradiť aj do vyučovania planimetrie a stereometrie na strednej škole.

I. Priestorová predstavivosť vo vyučovaní matematiky

Základom pre priestorovú predstavivosť v matematike sú pamäťové schématické predstavy s geometrickým obsahom a postupný prechod k vytváraniu nových predstáv, ktoré vznikajú pretváraním uvedených pamäťových predstáv.

Pri vyučovaní geometrie sa uplatňujú predovšetkým tri zložky:

1) geometrické vedomosti,
2) rozumové schopnosti,
3) geometrická predstavivosť.

V súčasnej didaktike matematiky [3], [6], [10], je termín geometrická predstavivosť zvyčajne používaný na označenie priestorovej predstavivosti v geometrii, ako schopnosti vybaviť si:

1) geometrické tvary, ich veľkosť, polohu v priestore,
2) daný útvar v inej než v jeho pôvodnej polohe,
3) zmenu tvaru, veľkosti, štruktúry, prípadne ďalších vlastností daného útvaru,
4) útvary v priestore na základe ich rovinného obrazu, alebo slovného popisu,
5) zobrazenie daného priestorového útvaru rovinným obrazom.

Ako sme už uviedli, učenie je výsledkom činnosti a prostredníctvom činnosti sa vyvíja. Pri rozvíjaní priestorovej predstavivosti žiakov je preto potrebné vychádzať z činnosti a postupne ju uplatňovať v rôznych formách ako:

- materiálovú činnosť (manipulácia s objektami, so stavebnicou, kartičkami, plastelínou, vystrihovačkami),
- materiálovú činnosť grafickú (náčrtky a rysovanie),
- jazykovú činnosť (popis predloženého modelu, ale aj popis predstavy, činnosti pri konštrukcii),
- myšlienkovú vnútornú činnosť (stanovenie postupu riešenia).

Konkrétne predstavy sa vytvárajú vo vedomí žiaka spojením názoru a živého slova. V matematike je toto dôležité pri budovaní správnej predstavy nového pojmu. Závisí od druhu použitej učebnej pomôcky, ale aj od schopností učiteľa.

Učiteľ môže cez vhodne volené didaktické pomôcky dokázať žiakom svoj záujem o ich zlepšenie v matematike, o to, aby sa učili s radosťou, dopriať im školu hrou. Učebných pomôcok, slúžiacich na individuálnu prácu žiakov v geometrii, rozvíjajúcich priestorovú predstavivosť, je však veľmi málo.

II. Didaktická hra ako vyučovacia metóda

Je to hra podľa pravidiel, ktoré spĺňajú didaktický cieľ. Žiaci si pri nej rozvíjajú a cvičia poznávacie schopnosti. Od spontánnej hry sa líši podľa [4] tým, že je

určená požiadavkami - pravidlami a využitá na určité vzdelávacie ciele, ktoré určuje učiteľ. Tým sa vlastne podobá učeniu a v podstate aj práci. Hrou je však preto, že žiaka baví činnosť sama, vlastný priebeh hry. Uspokojuje v nej svoje potreby, cit a fantáziu, jednoducho sa v nej realizuje. Pri hre často zabúda, že sa vlastne učí. A to je podstatné, čo by sa malo využiť.

Didaktická hra je metódou, pomocou ktorej žiaci ochotnejšie prijímajú poznatky, lepšie im porozumejú a intenzívnejšie sa zapájajú do vyučovania. Je vhodná na realizáciu väčšiny cieľov vyučovania matematiky. Rozvíja predstavivosť a myslenie. Najčastejšie sa pomocou nej precvičuje učivo, alebo motivuje výklad nových pojmov pri spoločnej analýze stratégie hry.

Didaktické hry sú základnou metódou práce v školských kluboch. Ich zaradenie do vyučovania umožňuje pristupovať k žiakom diferencovane, individuálne, a tak odstraňovať ich bariéry v učení. Je treba ale pripomenúť, že didaktická hra nie je univerzálnou metódou, ktorá je schopná riešiť vždy všetky úlohy. Veľa záleží na tom, akým spôsobom, ako často ju učiteľ zaradí do vyučovania. Vyučovacie hodiny, v ktorých sa využívajú didaktické hry, sú po organizačnej stránke pre učiteľa náročnejšie, ale na rozdiel od klasických hodín pre žiakov zaujímavejšie i efektívnejšie.

III. Matematické hry

Hry, ktoré existujú na trhu hračiek, sú väčšinou komplexnejšieho charakteru a okrem učiva matematiky precvičujú a rozvíjajú aj iné schopnosti žiakov, napríklad technické, estetické, schopnosti odhadu a podobne. Hry s matematickými námetmi kupujú rodičia deťom už v predškolskom veku (Človeče nehnevaj sa!, Domino, Bludisko,...). Dajú sa pomocou nich korigovať niektoré nedostatky vo vedomostiach žiakov. Napríklad naučiť sa rýchlejšie sčitovať pri hre „Človeče nehnevaj sa!". Pôvab týchto takzvaných „Hier pre odpoludnie" je v tom, že sa k nim môžeme vždy znova a znova vracať, brúsiť si „schopnosť vidieť", dôvtip, cvičiť vytrvalosť. Pritom máme len dve možnosti: vytrvať pri ich skladaní a zvíťaziť pri riešení úlohy, alebo prehrať.

Hru považujeme podľa [1] za matematickú, ak nastane niektorý z prípadov:

1) Pravidlá hry obsahujú isté matematické pojmy.
2) Na vykonanie predpísaných ťahov sú potrebné isté matematické znalosti.
3) Kombinačné a najmä kauzálne úvahy umožňujú takú analýzu hry, z ktorej vyplýva pre niektorého hráča optimálna stratégia, alebo čiastkový návod na výhru.

Matematické hry môžeme rozdeliť na:

HLAVOLAMY ... jednoduché činnostné úlohy,
SOLITÉRY ... zložené činnostné úlohy pre jedného hráča,

MATEMATICKÉ SÚŤAŽE ... každý jednotlivec pracuje sám a na koniec sa vyhodnotí najlepší výsledok,

MATEMATICKÉ HRY... pre dvoch a viacerých hráčov, ktorí striedavo robia predpísané ťahy a sledujú istý vopred vytýčený cieľ.

IV. Didaktická hra Tangram

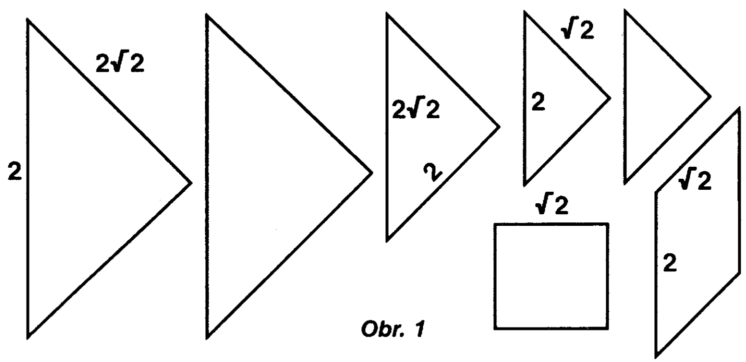
Medzi stavebnicami a skladačkami používanými v školskej praxi má najčastejšie použitie stavebnica kociek. Školskú stavebnicu z hranolov používa vo vyučovaní veľmi málo učiteľov 2. stupňa ZŠ a stredná škola sa obmedzuje len na využitie demonštračných modelov pri výklade nových pojmov.

Na trhu hračiek sú niekedy dostupné rovinné skladačky a stavebnice, rozdelené na 7 dielov, predávané pod spoločným názvom tangram. Pozri obr.5 a-l. Tento spoločný názov sa po prvýkrát objavil vo Veľkej Británii koncom minulého storočia. Tan označuje čínsky pôvod a gram znamená znak, či obrazec.

Názov tangram znamená teda ľubovoľný konvexný útvar, rozdelený na sedem dielov podľa určitých zákonitostí, z ktorých sa dajú skladať rôzne súvislé obrazce. V knihe [8] sa uvádza 61 rôznych známych tangramov alebo možností, ako deliť jednoduché obrazce na 7 dielov a takto si vyrobiť dômyselnú skladačku, odporúčanú pre deti už od 8 rokov.

Sedem geometrických tvarov bolo zoskupených do tvaru štvorca v Číne už pred 1800 rokmi, pozri obr.5b a malo rôzne názvy: „Tabuľka siedmich divov, Tabuľka múdrosti, Dômyselná sedemdielna skladačka". Tento klasický čínsky tangram budeme používať v našej práci ako najideálnejší pre potreby výuky geometrie a pre odlíšenie ho označíme ako Tangram s veľkým „T".

Tento Tangram tvorí päť pravouhlých, rovnoramenných trojuholníkov (najväčší a najmenší sa opakujú dva razy), jeden štvorec a jeden kosodĺžnik. Pozri obr.1.



Obr. 1

Všetkých sedem dielov možno zložiť do tvaru štvorca, obdĺžnika alebo trojuholníka, ale pravdepodobne vznikli rozdelením štvorca tak, ako to vidíme na obr.6. Medzi piatimi dielmi rôznej veľkosti a tvaru sú nápadné závislosti vo veľkosti strán, uhlov a obsahu dielov. Spolu sú tu iba štyri dĺžky strán, ktorých vzťah možno vyjadriť algebraicky. Tieto vzťahy umožňujú kombinovať jednotlivé diely mnohými spôsobmi, a tak vytvárať súvislé obrazce, v ktorých sa strácajú charakteristické črty použitých dielov. Naopak, typické tvary jednotlivých dielov zasa vynikajú v obrysoch zostaveného konečného obrazca, napríklad v štvorcových hlavách zostavených postavičiek, prípadne s trojuholníkovými klobúkmi, v zobákoch a krídlach vtákov. Okrem zvieracích figúr a ľudských postáv v činnosti sa dajú skladať aj rôzne predmety. Pozri obr.10 až 14.

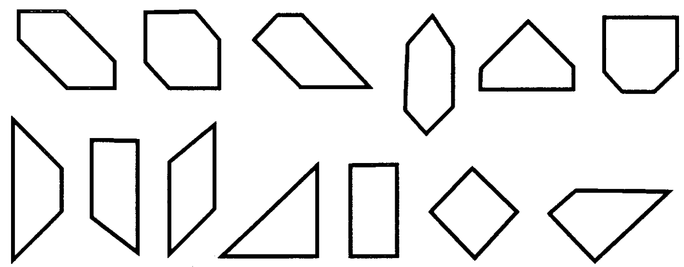
Táto vlastnosť umožňuje vhodne využiť rovinnú skladačku Tangram ako experimentálnu pomôcku pri vyučovaní matematiky.

Pri hre sa musia dodržiavať tieto pravidlá:

1) V každom obrazci sa musí použiť všetkých 7 častí
2) Žiadne časti sa nesmú prekrývať
3) Všetky diely sa môžu ľubovoľne prevracať

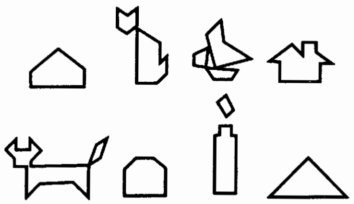
Zostavovaním obrazcov podľa predlohy sa dobre precvičuje konštruktívna predstavivosť, zmysel pre geometrické obrazce a ich zákonitosti. Dieťa sa učí vidieť plochu.

Je zaujímavé, že obrazcov možno zložiť z Tangramu veľa, ale konvexných mnohouholníkov, ako ukázali čínski matematici, ktorí sa v 40. rokoch minulého storočia skladačkou zaoberali, je len trinásť. A to práve jeden trojuholník, šesť rôznych štvoruholníkov, dva rôzne päťuholníky a štyri rôzne šesťuholníky. Pozri obr.2.

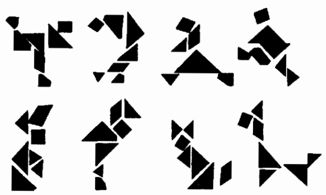


Obr.č.2

So skladačkou môžeme pracovať v podstate dvoma spôsobmi:
1) Stavebnicovými prvkami vyplniť ohraničenú plochu (obr.3).
2) Skladanie dielikov podľa predlohy (obr.4).



Obr.č.3



Obr.č.4

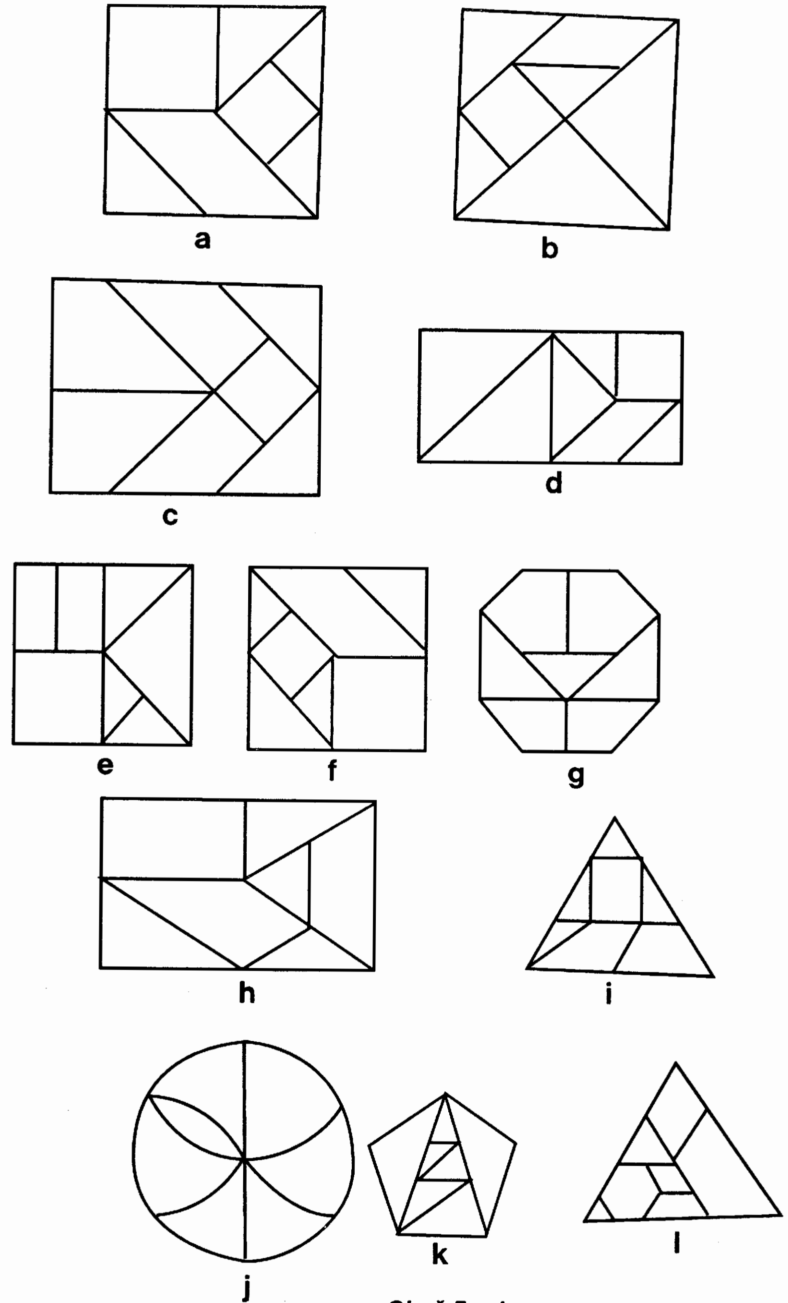
Do Európy sa Tangram dostal začiatkom 19. storočia a hneď si získal veľkú obľubu, o čom svedčí množstvo publikácií, ktoré sa mu venovali azda vo všetkých krajinách tohoto kontinentu, ale aj v USA. Prvé príklady a obrazce sa prevzali ešte z Číny, ktoré do Európy priviezli cestovatelia očarení Tangramom. Ale ako sa Tangram šíril po svete, rozvíjala sa okolo neho tvorivá vynachádzavosť. V súčasných moderných príručkách je známych už viac ako 1000 rôznych vytvorených obrazcov z Tangramu. Niektoré námety uvádzame v pracovných listoch na strane č. 11 a 22.

Ak vyrobíme Tangram z hrubšej dosky, pozri obr.8, získame stavebnicu, kváder, rozdelený na 7 hranolov, z ktorých je možné zostavovať rôzne telesá. Hra s touto stavebnicou, pri ktorej skladáme zložené telesá podľa predlohy, alebo podľa obrysu podstavy, umožňuje žiakovi už v skoršom veku vidieť vnútorné členenie telesa, zloženého z jednoduchých hranolov.

Dôležitú úlohu v práci s touto skladačkou a stavebnicou má aj zácvik, t.j. istá predchádzajúca skúsenosť s touto činnosťou. Vo všeobecnosti platí, že čím viac obrazcov jedinec vyrieši, tým ľahšie zostavuje ďalšie.

Rôzne druhy tangramov uvádzame na obr.č.5. a-l.

S Tangramom sa dá trénovať tvorivý spôsob myslenia a zlepšovať videnie aj formou súťaživej hry. K zostavenému obrázku (viacvýznamovému) vymyslieť najvtipnejší, najoriginálnejší názov, prípadne k danému názvu zostaviť obrázok. Nápady



Obr.č.5. a-l.

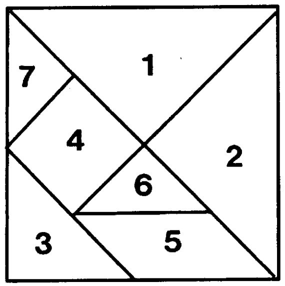
sa triedou anonymne bodujú. Víťazí hráč s najväčším počtom bodov. Tiež je možné viesť súťaž v zostavovaní obrazcov v časovom limite a tak objaviť žiakov s dobrou predstavivosťou v rovine, či v priestore. V rámci „Hier pre popoludnie" môžeme zadávať modelovanie podľa predlohy.

Od roku 1988 je Tangram zaradený v Nemecku ako hra rozvíjajúca videnie detí do ich predškolskej prípravy. Ukážka Tangramu bez zaradenia vhodných matematických úloh je súčasťou cvičebnice [2] v alternatívnom vyučovaní matematiky v Čechách.

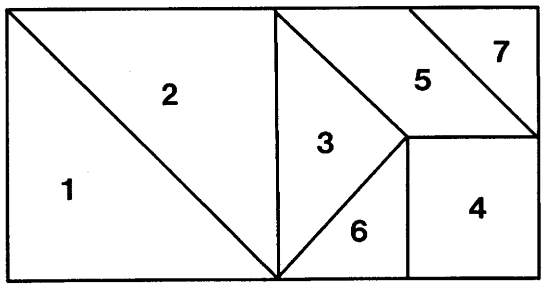
Osvedčila sa skladačka z farebnej pevnej plastickej fólie, alebo tvrdšieho papiera, ako aj jednofarebná drevená stavebnica. Trojuholníky, štvorec a kosodĺžnik prekreslíme na tvrdý papier, prípadne na tenkú doštičku, vystrihneme alebo vyrežeme. Základným predpokladom úspechu je presnosť pri výrobe dielikov. Ak vyrezávame skladačku z obdĺžnikového tvaru, potom najvhodnejšie rozmery obdĺžnika sú 5 cm a 10 cm.

Pri výrobe stavebnice sú pre vyučovanie matematiky najvhodnejšie rozmery kvádra, z ktorého ju režeme a = 16 cm, b = 8 cm a c = 3 cm. Pri ich výrobe môžeme využiť medzipredmetové vzťahy a pripraviť trojrozmernú stavebnicu v rámci vyučovacích hodín v predmete Technická výchova, alebo Výtvarná výchova so žiakmi.

S k l a d a č k a   Tangram v tvare obdĺžnika a štvorca

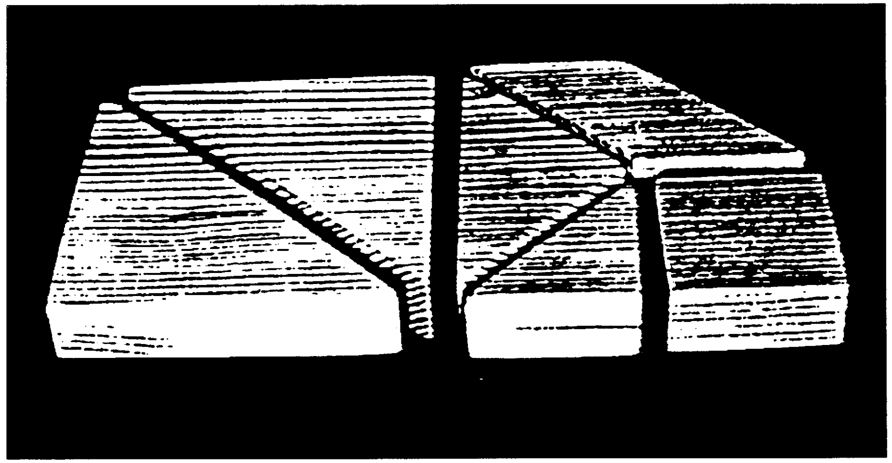


Obr.6



Obr.7

S t a v e b n i c a   Tangram zhotovená žiakmi v 6. roč. ZŠ



Obr.8

4.1. MOTIVAČNÉ ÚLOHY

Dôležitú úlohu pri práci s Tangramom hrá zácvik, t.j. predchádzajúca skúsenosť s touto činnosťou. Preto je vhodné v triede začať v úvode frontálnu prácu, pričom si žiaci najprv narysujú podľa predlohy Tangram, vyfarbia ho a vystrihnú. Pri skladaní dielikov podľa obrysu predlohy pracujeme so skladačkou v jednej farbe, pričom sa učíme vidieť plochu, v ktorej sa strácajú charakteristické črty použitých dielov. Pri členení ohraničenej plochy dielmi použijeme farebnú verziu, ktorá umožňuje vidieť rôzne možnosti vnútorného členenia plochy, v ktorých vyniknú typické tvary jednotlivých dielov.

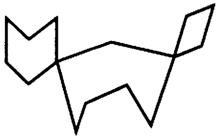
ÚLOHA č. 1: Narysujte na tvrdší papier Tangram podľa obrázku. Zhodné diely vyfarbite len na jednej strane rovnakou farbou (najmenšie trojuholníky č.6,7 žltou, stredný trojuholník č.3 modrou, veľké trojuholníky č.1,2 červenou farbou. Štvorec č.4 oranžovou a kosodĺžnik č.5 zelenou farbou). Vystrihnite ich presne podľa narysovaných strán.

Ak vytvárame troj-, štvor-, päť-, alebo šesťuholník, je vhodnejšie pracovať s jednofarebnou verziou Tangramu, pri ktorej môžeme jednotlivé diely ľubovoľne prevracať s cieľom vytvoriť mnohouholník s danou vlastnosťou. Pripravenú skladačku použijeme na výklad pravidiel hry s Tangramom pri riešení nasledovnej úlohy:

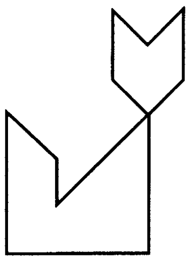
ÚLOHA č. 2:
Zo všetkých dielov Tangramu zlož postupne mačku, vtáka, medveďa.

Ústnou formou podrobne vysvetlíme pravidlá hry a súčasne vysvetlíme prípadné nejasnosti. Žiaci pritom pracujú individuálne. Svoje riešenia si ohodnotia v 4-členných skupinkách a jedno za skupinu demonštrujú na magnetickej tabuli. Učiteľ spolu s triedou ohodnotí originalitu útvaru odpovedajúceho danému pojmu (mačka) a súčasne poukáže na rôzne videnie toho istého pojmu.

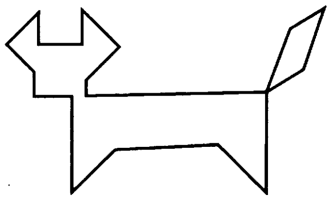
Niektoré riešenia (mačka): Obr. 9(a-c).



9.a



9.b



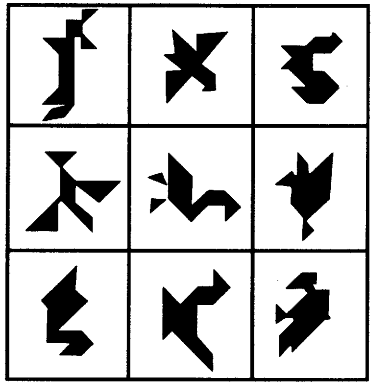
9.c

4.2. MNOHOUHOLNÍKY

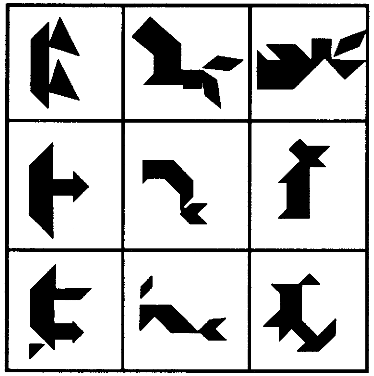
Skúsenosti z výskumov ukazujú, že žiaci často pod pojmom obsah obrazca nevidia časť roviny ohraničenú uzavretou krivkou, s konkrétnou výmerou, ktorej tvar môže byť rôzny, ale len vzorec (napr. S=a.a, S=a.b), ktorý treba na výpočet obsahu obrazca. Ťažko chápu, že dva kolmé hranoly s rovnakým objemom a tou istou výškou môžu, ale nemusia mať rovnaký tvar. Preto úlohy zvolené v tejto zbierke majú pomôcť rozvíjať predstavivosť žiaka v rovine a v priestore.

Pri nácviku videnia priestoru zohráva dôležitú úlohu schopnosť vidieť rôzne možnosti členenia danej plochy. Podľa zásady: „Ak chceš vidieť nevidené, pozorne

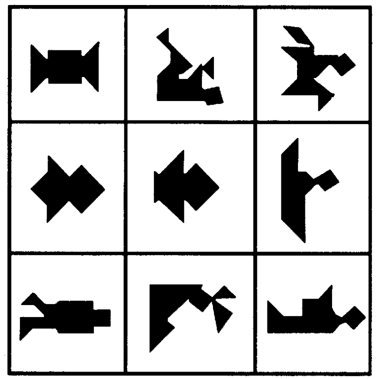
TANGRAM - motivačné úlohy



Obr.č.11

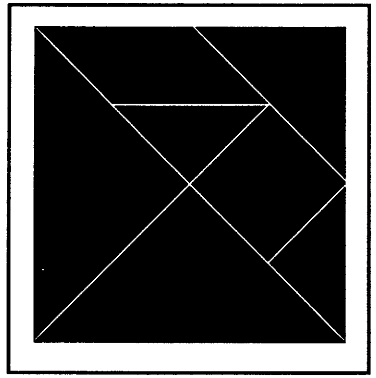


Obr.č.12

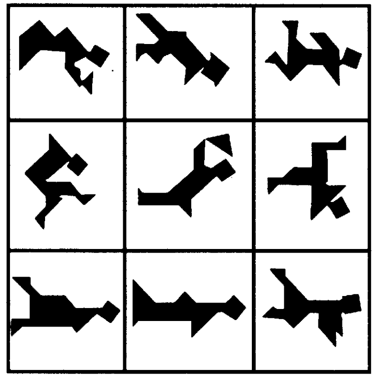


Obr.č.13

MOTIVAČNÉ ÚLOHY



Obr.č.10



Obr.č.14

sa pozeraj na videné", môžeme v triede usporiadať súťaž v hľadaní vnútorného členenia daného mnohouholníka z motivačných úloh v predlohe. Pozri obrázky č. 10-14. Predlohu umiestnime na nástenke a môžeme usporiadať turnaj (súťaž) medzi triedami v ročníku, prípadne v triede o najväčší počet správnych riešení. Takto postupne vytvárame návyk na prácu so skladačkou pred zámerným skúmaním jej matematických zákonitostí.

ÚLOHA č. 3:
Zo všetkých dielov Tangramu zložte trojuholník, štvoruholník, päťuholník, šesťuholník. Koľko rôznych šesťuholníkov viete zostrojiť?

Táto úloha dáva priestor pre uplatnenie originality, tvorivosti, fantázie, pričom umožňuje zopakovať pojmy: mnohouholník, uhly, trojuholník, štvorec, obdĺžnik, rovnobežník, konvexný a nekonvexný útvar a dá sa využiť pozitívne aj vo výchovnej činnosti. Pretože žiaci už boli oboznámení v predchádzajúcej úlohe so skladaním štvoruholníka, môžeme skladanie štvoruholníka zaradiť ako matematickú súťaž dvojíc v rámci matematickej rozcvičky a ostatné útvary môžu byť námetom pre „Hry pre popoludnie", ktoré vyhodnocujeme a uverejňujeme na matematickej nástenke v triede. Pozri obr. 2.

4.3. OBVOD OBRAZCA

Deťom, ktoré sa doteraz neučili geometriu, otvára geometrický svet učiteľ. Je to jedna z najťažších stránok vyučovacieho procesu a jej efektívnosť je založená na skúsenostiach žiakov, na fantázii, na tom, ako prebieha transfer okolitých javov zo sveta do psychiky žiaka. Predstavivosť tu zohráva významnú úlohu.

Vidieť geometrické súvislosti v typických pohľadoch je zložkou chápania geometrie ako jazyka matematiky. Pri riešení geometrických úloh sa učiteľ často stretáva so situáciou, pri ktorej žiaci vidia a súčasne nevidia hľadané objekty, pretože ich na ne nikto neupozornil. Pri formovaní „videnia" zohráva veľkú úlohu zámerné pozorovanie. V matematike nestačí len myslieť, aby sme videli. Videniu v matematike sa treba učiť a pretože je podmienené myslením, nemôže byť oddelené od vedomostí. Toto dobre poznajú hlavne výtvarníci. Podľa [7] neexistuje žiadne videnie bez myslenia.

V téme obvod a obsah obrazca môžeme využiť Tangram na postupné uvedomovanie si matematických zákonitostí členenia plochy obrazca. Využívame pritom nápadné závislosti vo veľkostiach strán, uhlov a obsahov jednotlivých dielov, ktoré možno vyjadriť aj algebraicky.

ÚLOHA č. 4:
Z dvoch najväčších zhodných pravouhlých trojuholníkov Tangramu vymodelujte všetky rôzne útvary priložením zhodných celých strán k sebe. Poznáte bez počítania, ktorý štvoruholník má najdlhší a ktorý najkratší obvod? Svoje modely nakreslite do štvorcovej siete.

ÚLOHA č. 5:
Vystrihnite si z tvrdého papiera dva zhodné pravouhlé trojuholníky s dĺžkami strán 3 cm, 4 cm, 5 cm, vymodelujte rôzne trojuholníky a štvoruholníky prikladaním zhodných celých strán k sebe. Viete bez počítania, len porovnaním jednotlivých strán určiť, ktorý trojuholník a štvoruholník má najväčší a ktorý najmenší obvod?

Obe úlohy môžeme použiť v súťaži dvojíc ako netradičnú metódu oboznámenia sa s kauzálnym myslením. Po súťaži realizujeme spoločnú stratégiu hľadania najmenšieho obvodu a všímame si, koľko detí už stratégiu objavilo, prípadne pokročilo v jej riešení. Pre utvrdenie poznania zaradíme nasledujúce úlohy.

ÚLOHA č. 6:
Poznáte bez počítania, ktoré ďalšie útvary skladačky Tangram majú rovnaký obvod ako útvary zostavené z dvoch najmenších trojuholníkov skladačky? Ak áno, vyberte ich zo skladačky.

ÚLOHA č. 7: (individuálne)
Zložte zo všetkých dielov Tangramu obdĺžnik, potom štvorec. Vypočítajte ich obvody. Rozmery zistite.

ÚLOHA č. 8:
Môžete zo skladačky Tangram zostaviť dva zhodné štvorce? Ak áno, vymodelujte ich a nakreslite do štvorcovej siete. Ak nie, odôvodnite.

ÚLOHA č. 9:
Obvod našej skladačky v tvare obdĺžnika je 30 cm. Určte obvod dvoch zhodných štvorcov z nej zostavených.

Posledné uvedené úlohy môžeme zaradiť ako geometrickú súťaž štvorčlenných družstiev. Nácvik zostavovania obdĺžnika a štvorca zo všetkých dielov Tangramu považujeme za dôležitý stupeň rozvíjania priestorovej predstavivosti žiaka v príprave výuky rezov telies.

4.4. OBSAH OBRAZCA

Hra na dlaždiča:
Súťaž vo dvojiciach, ktoré spolu merajú, modelujú a počítajú obsahy. Víťazí ten, kto skôr a správne vyrieši úlohu.
Stratégia hry: Stačí odmerať odvesnu a preponu najväčšieho trojuholníka.

Úloha č. 10a:
Vymodelujte zo všetkých dielov skladačky Tangram obdĺžnik. Odmerajte jeho strany a vypočítajte obsah.

Úloha č. 10b:
Vymodelujte zo všetkých dielov skladačky Tangram štvorec. Odmerajte jeho strany a vypočítajte jeho obsah. Ak ste menej zruční, postupujte podľa obrázku č. 6.

Úloha č. 10c: Hľadanie strateného cm².
Porovnajte obsah obdĺžnika a štvorca, zostavených zo skladačky Tangram. Sú rovnaké? Ak nie, odôvodnite.

Pri riešení týchto úloh používame metódu pokusu a omylu, pri ktorej si žiaci uvedomujú obsah ako vlastnosť daného rovinného útvaru. Útvary s rovnakým obsahom môžu, ale nemusia mať rovnaký tvar (štvorec - obdĺžnik). Žiaci vidia, že útvary vytvorené z tých istých dielov musia mať rovnaké obsahy. Presnosť výpočtu pomocou vzorcov závisí od presnosti merania vstupných údajov. Žiakov nižších ročníkov môžeme takto upozorniť na geometrizáciu násobenia.
Medzi hlavolamy s podobným obsahom činnosti zaraďujeme aj nasledujúce úlohy:

Úloha č. 11a:
Rozdeľte dva zhodné štvorce na časti tak, aby sa zo všetkých dal zložiť jeden štvorec.

Úloha č. 12a:
Rozdeľte dva ľubovoľné štvorce na časti tak, aby sa zo všetkých dal zložiť jeden štvorec.

Úloha č. 13a:
Rozdeľte tri zhodné štvorce na časti tak, aby sa zo všetkých dal zložiť jeden štvorec.

Úloha č. 14a:
Zmeňte štvorec na obdĺžnik s rovnakým obsahom.

Úloha č.11 má dva rôzne spôsoby riešenia, ktoré sú podnetom pre riešenie 12. a 13. úlohy. Môžeme ich riešiť v rámci individuálnej súťaže v danom časovom limite (úloha č.11) aj v nižších ročníkoch ZŠ, alebo ako hlavolam v rámci matematického krúžku, či popoludnia.

Skúste sa zamyslieť nad postupom riešenia týchto úloh, ak z textu vynecháme podmienku „TAK“: Je slovo „TAK“ signálom ku hľadaniu algoritmu riešenia týchto úloh pomocou známych geometrických poznatkov? Nepotláča do úzadia schopnosť riešiť úlohu metódou pokusu a omylu, na základe vlastného videnia?

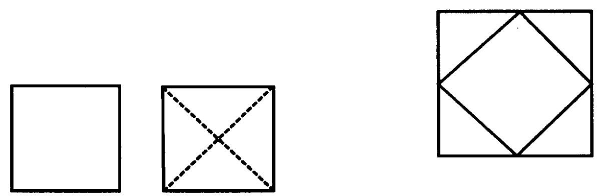
Porovnajte postup riešenia úlohy žiakmi v prípade textov 11b, až 13b.

Úloha č. 11b:
Rozdeľte dva zhodné štvorce na časti a zložte z nich štvorec.

Úloha č. 12b:
Rozdeľte dva ľubovoľné štvorce na časti a zložte z nich štvorec.

Úloha č. 13b:
Rozdeľte tri zhodné štvorce na časti a zložte z nich štvorec.

Riešenie:
11a. 1)

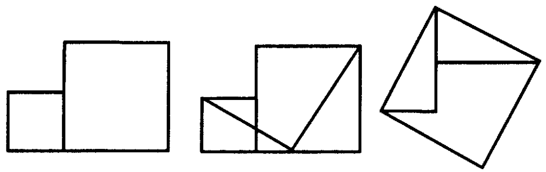


Obr. 15

11a. 2)

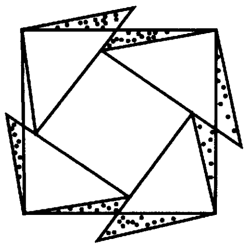
Obr. 16

12.



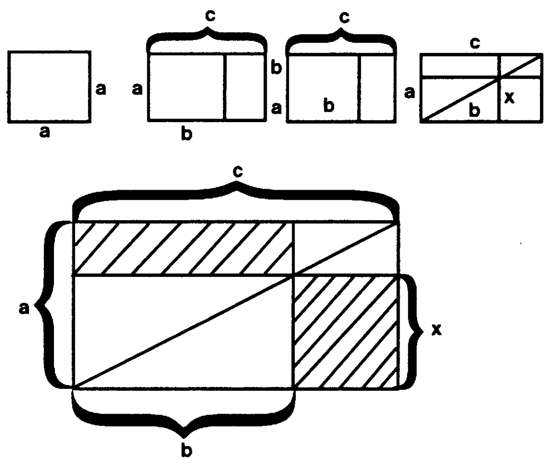
Obr. 17

13.



Obr. 18

14. Využijeme geometrizáciu násobenia
   a . b = c . x



a . a = c . x *Obr. 19*

Úloha č. 15:

Zoberte zo skladačky TANGRAM dva najmenšie, zhodné trojuholníky. Vymodelujte z nich všetky rôzne útvary priložením zhodných strán k sebe. Riešenie nakreslite do štvorcovej siete. Môžete určiť obsah všetkých útvarov? Ak áno, určte, ak nie, odôvodnite.

Túto úlohu je vhodné zaradiť aj ako motivačný problém k určeniu obsahu mnohouholníka (rovnobežníka), pre ktorý nepoznáme vzorec.

Úloha č. 16:

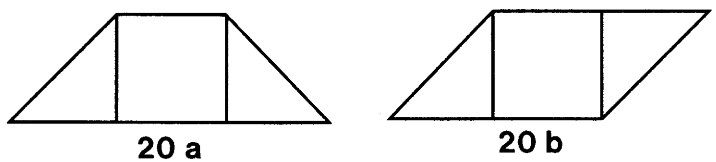
Zistite porovnaním pomocou malých trojuholníkov, ktoré diely Tangramu majú rovnaký obsah. Svoje zistenie zapíšte do zošita.

Úloha č. 17:

Vymodelujte z dvoch zhodných, pravouhlých trojuholníkov s rozmermi a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm všetky rôzne trojuholníky a štvoruholníky. Útvary si nakreslite do štvorcovej siete. Môžete bez počítania určiť obsah každého z nich? Ak áno, určte. Ak nie, odôvodnite.

Úloha č. 18: Hra „Ukáž, čo vieš“

Vymodelujte z dvoch najmenších zhodných trojuholníkov skladačky Tangram a štvorca rôzne mnohouholníky prikladaním celých zhodných strán k sebe. Nakreslite si ich do štvorcovej siete a porovnajte ich obsahy. Pokúste sa nájsť



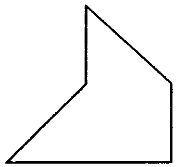
Obr. 20 a, b.

všetky riešenia (8).

Túto hru môžeme zaradiť v rámci rozširujúcich cvičení z matematiky na ZŠ aj na SŠ. Precvičuje kombinatorické myslenie žiaka a schopnosť vidieť vnútorné členenie útvaru. Jej vhodná realizácia je pri súťaži 4-členných skupín, v ktorých každý žiak pracuje individuálne a nové, odlišné riešenie si skupina zaznamenáva na spoločný hárok štvorčekového papiera.

Úloha č. 19: „Pre bystré oči“

Jožko hodil papierovú lastovičku. Jej tvar je na obrázku č.21. Vymodelujte takýto tvar pomocou niektorých z dielov č. 3, 4, 5, 6 Tangramu. Koľko je rôznych



Obr. 21

riešení? Nakreslite si ich na štvorčekový papier.

Úloha č. 20:

Vymodelujte tvar na obrázku č.21 pomocou všetkých dielov Tangramu. Koľko je rôznych riešení? Nakreslite ich.

Úloha č. 21:

Z ktorých dielov Tangramu je možné vymodelovať trojuholník? Nájdite všetky riešenia a nakreslite ich.

Úloha č. 22:

Zo všetkých dielov Tangramu zostavte mačku, medveďa, vtáka, človeka, sviečku. Viete určiť obsah takéhoto mnohouholníka?

Úloha č. 23: Práca s farebnou skladačkou

Pre zlepšenie videnia vyfarbite jednu stranu papierového Tangramu takto: oba veľké trojuholníky červenou, oba malé trojuholníky žltou, stredný trojuholník modrou, štvorec žltou a rovnobežník zelenou farbou. Skúste riešiť úlohy č. 11 - 20 pomocou farebného Tangramu. Našli ste nové riešenie? Ak áno, ukážte ho spolužiakom na nástenke.

4.5. POVRCH A OBJEM TELESA

Pri riešení úloh v tejto téme pracujeme pomocou stavebnice Tangram, ktorú môžu žiaci vyrobiť v rámci práce s drevom v predmete Technická výchova v 6. ročníku ZŠ (obr. 8). Využitie stavebnice je možné v rámci poznania medzipredmetových vzťahov v matematike, výtvarnej výchove, technickej výchove, prvouke, ako aj v práci v krúžkoch a školských kluboch. Pre rozvíjanie priestorovej predstavivosti v matematike odporúčame jej zaradenie pri výklade nových pojmov v nasledujú-

cich úlohách.

Úloha č. 24:

Rozdeľte všetky hranoly v stavebnici Tangram na trojboké a štvorboké. Zistite, ktorých je viac.

Úloha č. 25:

Určte počty vrcholov, stien a hrán trojbokých a štvorbokých hranolov v stavebnici Tangram.

Úloha č. 26:

Aký tvar majú jednotlivé steny hranolov stavebnice Tangram?

Úloha č. 27:

Vo štvorcovej sieti nakreslite siete jednotlivých telies stavebnice Tangram. Vypočítajte povrch týchto telies.

Úloha č. 28:

Vyberte zo stavebnice Tangram trojboký a štvorboký hranol. Načrtnite vo voľnom rovnobežnom premietaní tieto dva hranoly.

Táto úloha je veľmi náročná pre žiakov 6. ročníka ZŠ, ale umožňuje zopakovať a utvrdiť zásady voľného rovnobežného premietania po prebratí učiva o hranoloch.

Ďalšia skupina úloh je podnetom pre súťaže dvojíc, v ktorých modelovaním pomocou stavebnice Tangram hľadáme všetky rôzne telesá s rovnakým objemom, pričom precvičujeme priestorové videnie.

Úloha č. 29:

Pomocou dvoch najmenších trojbokých hranolov stavebnice Tangram vymodelujte zložené teleso tak, že priložíte k sebe zhodné celé steny. Koľko rôznych telies môžete vymodelovať? (Telesá vytvorené otočením považujeme za zhodné).

Úloha č. 30:

Vypočítajte objem stavieb zostavených v predošlej úlohe. Môžete určiť objem takto zložených telies aj bez počítania? Ak áno, navrhnite riešenie, ak nie, odôvodnite.

Úloha č. 31:

Viete vybrať zo stavebnice Tangram telesá, ktorých objem sa rovná objemu dvoch najmenších trojbokých hranolov? Svoje riešenie overte výpočtom objemu vybratých telies.

Schopnosť kombinovať priestorové útvary pri vytváraní rôznych tvarov telies môžeme precvičiť pri riešení nasledujúcich úloh.

Úloha č. 32:

Z ktorých telies zo stavebnice Tangram môžeme zostaviť trojboký hranol? Skúste nájsť všetky riešenia. Podstavy zložených hranolov nakreslite do štvorcovej siete. Koľko rôznych stavieb ste postavili? Využite aj možnosť stavať vo viacerých vrstvách.

Úloha č. 33:

Zvoľte za jednotku objemu objem jedného najmenšieho trojbokého hranola. Určte pomocou tejto jednotky objem ostatných častí stavebnice Tangram.

Zapíšte ho do zošita (1 j.o. = 1 m.t.h.).

Úloha č. 34:

Aký najvyšší trojboký hranol môžete postaviť zo všetkých častí stavebnice Tangram? Nakreslite jeho podstavu do štvorcovej siete. Vypočítajte jeho objem v jednotkách m.t.h.

Úloha č. 35:

Aký najvyšší štvorboký hranol môžete postaviť zo stavebnice Tangramu? Odmerajte jeho hrany a vypočítajte objem v cm^3.

Úloha č. 36:

Postavte z dvoch najväčších trojbokých hranolov Tangramu opäť trojboký hranol tak, že:

a) priložíte k sebe podstavy hranolov,

b) priložíte k sebe steny hranolov.

Poznáte bez počítania, ktorý trojboký hranol má najväčší povrch a ktorý najväčší objem? Ak áno, napíšte do zošita odpoveď. Overte ju výpočtom.

Úloha č. 37:

Vymodelujte z dvoch najmenších trojbokých hranolov a štvorbokého hranola so štvorcovou podstavou rôzne trojboké, štvorboké, päťboké a šesťboké hranoly prikladaním zhodných stien k sebe. V ktorej skupine je najviac vymodelovaných telies?

Úloha č. 38:

Zo všetkých dielov stavebnice Tangram zostavte hranol s obdĺžnikovou podstavou, potom hranol so štvorcovou podstavou. Porovnajte ich objemy. Výsledok

porovnania zapíšte.

HRA „Na stavbárov":

Hrajú proti sebe dvaja hráči. Zo stavebnice Tangram postaví prvý zloženú stavbu a druhý určí jej povrch a objem. Potom si úlohy vymenia. Prehráva ten, kto nedokáže úlohu v danom časovom limite vyriešiť.

Tvorivý prístup k riešeniu úloh z praxe predpokladajú úlohy s marketingovým obsahom, ktoré žiaci riešia v rámci súťaže „Ekonomická burza". Jej cieľom je navrhnúť a realizovať výrobu takých výrobkov, ktoré môžu vyrábať žiaci a ktoré slúžia aj na účely vzdelávania.

Úloha č. 39:

Koľko m^2 papiera musí objednať výrobca na výrobu 100 kusov krabičiek s podstavou tvaru obdĺžnika, v ktorých bude predávať stavebnicu TANGRAM s rozmermi 8 cm x 16 cm x 3 cm? Pri výrobe sa ráta s 1/20 odpadu materiálu. Navrhnite tvar krabičky tak, aby spotreba papiera bola čo najmenšia. Navrhnite tvar podstavy hranola zostaveného zo všetkých dielov Tangramu tak, aby mal vytvorený hranol najmenší povrch.

Úloha č. 40:

Koľko drevených dosiek s rozmermi 25 cm x 100 cm x 3 cm potrebuje výrobca na výrobu 100 kusov Tangramu s rozmermi uvedenými v predchádzajúcej úlohe, ak sa pri výrobe ráta s 12 % odpadu?

4.6. OSOVÁ A STREDOVÁ SÚMERNOSŤ SÚMERNOSŤ ROVINOVÁ

V predlohe pracovného listu na 22. strane je 54 úloh, ktoré sa dajú vymodelovať z rovinnej skladačky Tangramu. Cieľom je rozhodnúť, či daný útvar je osovo, alebo stredovo súmerný a zložiť ho zo skladačky Tangram.

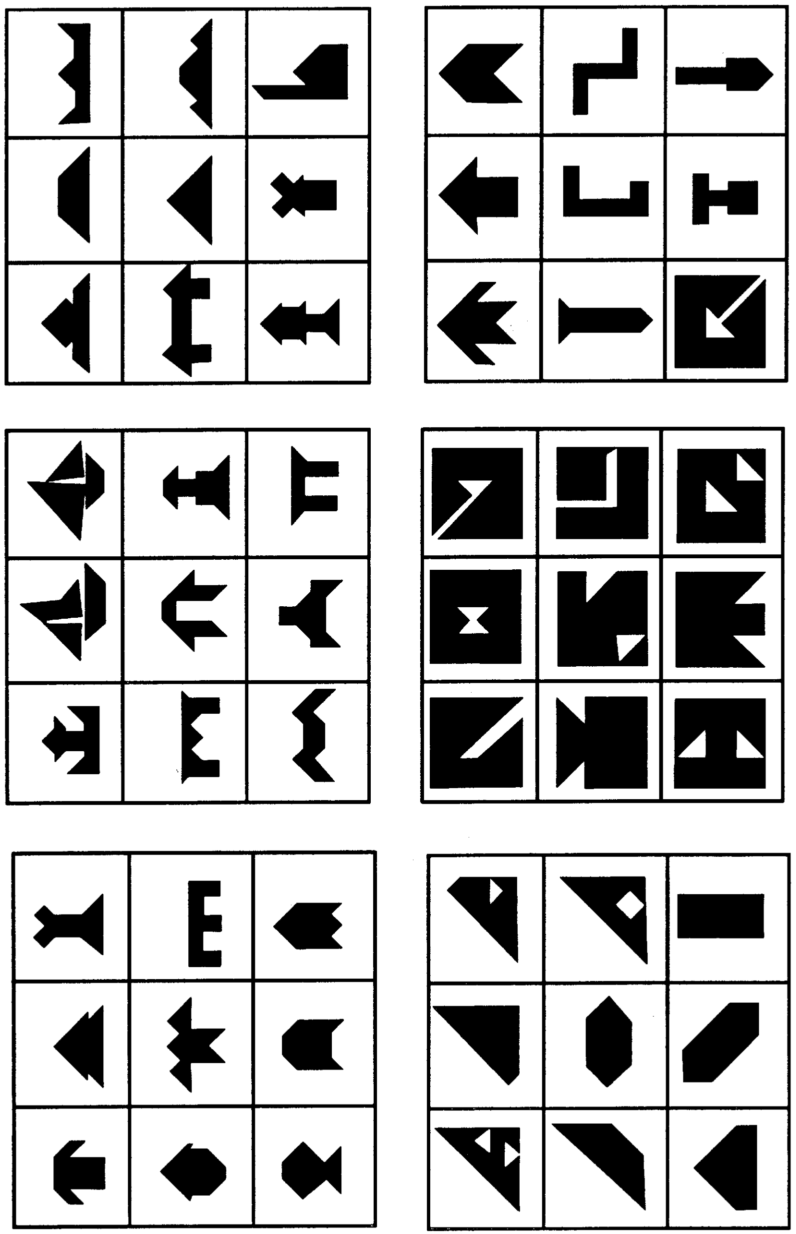
Odporúčame modelovanie týchto útvarov z jednofarebnej skladačky pre lepšie videnie celej plochy.

Pri modelovaní zo stavebnice určiť, či stavba, ktorej tvar podstavy je v predlohe pracovného listu, je súmerná podľa roviny súmernosti, alebo stredu súmernosti.

Pracovný list SÚMERNOSŤ

Vyznač osi a stredy súmernosti útvarov v predlohe. Zlož ich zo skladačky Tangram. Zo stavebnice Tangram zlož hranoly, ktoré majú tvar podstáv uvedený v predlohe.

Pracovný list SÚMERNOSŤ



4.7. IRACIONÁLNE ČÍSLA

Medzi piatimi dielmi Tangramu sú nápadné závislosti v dĺžkach strán. Tieto závislosti možno vyjadriť algebraicky alebo číselne, a tak prísť na cestu objavu iracionálnych čísel.

Úloha č. 41: „Hra na výskumníkov"
V akom pomere sú veľkosti odvesny a prepony všetkých trojuholníkov v skladačke?

Vo štvorčlenných skupinách meriame jednotlivé údaje o všetkých trojuholníkoch. V závislosti na presnosti merania postupne vyvodíme pojem iracionálne číslo.

	T1	T2	T3
prepona trojuholníka u= odvesna trojuholníka a= u:a=			

4.8. PODOBNOSŤ TROJUHOLNÍKOV

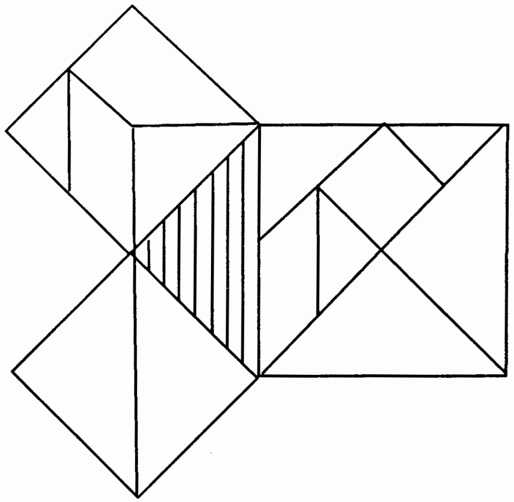
Podobne ako v „Hre na výskumníkov" skúmame a zapisujeme údaje do tabuľky. Experimentálne odvodíme koeficient podobnosti, demonštrujeme zmenšenie, zväčšenie a zhodnosť dvoch podobných útvarov.

Úloha č. 42:
V akom pomere sú veľkosti odpovedajúcich si strán všetkých trojuholníkov v Tangrame?

4.9. PYTAGOROVA VETA

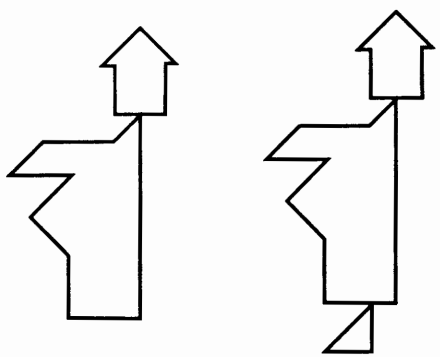
Úloha č. 43:
Ak platí Pytagorova veta, tak z dvoch štvorcov zostrojených nad odvesnami rovnoramenného pravouhlého trojuholníka môžeme zostaviť štvorec. Ukážte to pomocou dvoch zhodných skladačiek Tangramu.

Učitelia majú možnosť usporiadať s Tangramom rôzne súťaže v triede alebo medzi triedami, a tak objaviť žiakov, ktorí majú dobré priestorové videnie, ako aj prispieť k rozvíjaniu videnia ostatných žiakov.



Obr. 22

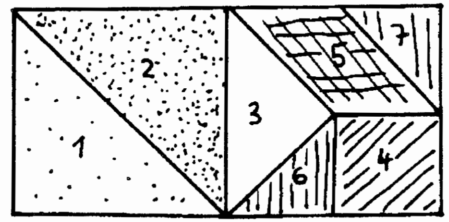
Pre tých, ktorí majú radi matematické hádanky uvádzame slávny paradox H. Dudneya. Dva obrazce na obr. 23a, 23b sú zdanlivo rovnaké, okrem toho, že druhá postavička má nohy; na zostavenie obidvoch figúr sa pritom, ako vždy, použilo všetkých sedem dielov Tangramu. Kde sa podel trojuholník v prvej postave (obr. 23a)?



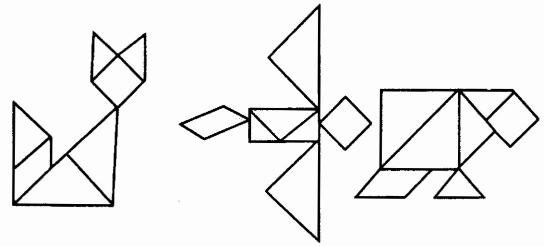
Obr. 23 a, b

V. Niektoré riešenia úloh

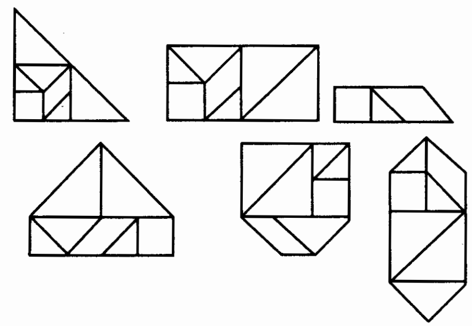
Úloha č. 1:



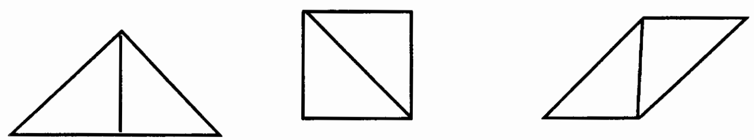
Úloha č. 2:



Úloha č. 3:



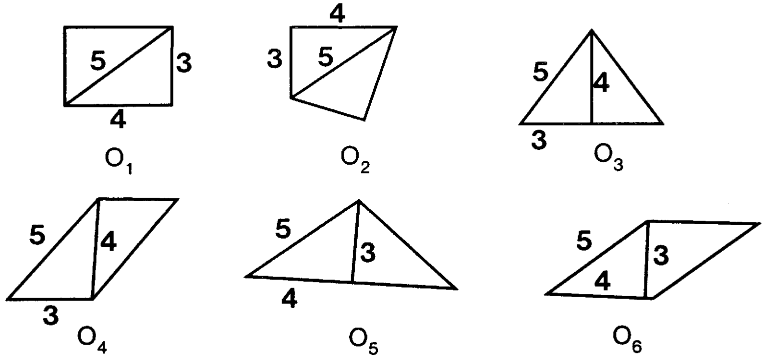
Úloha č. 4:



O_1 O_2 O_3

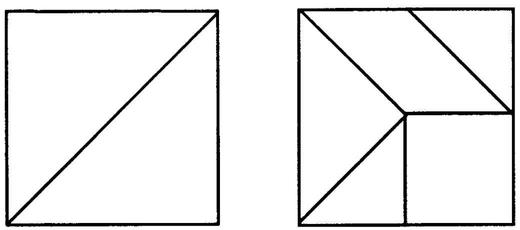
$O_1 = O_3 > O_2$

Úloha č. 5:

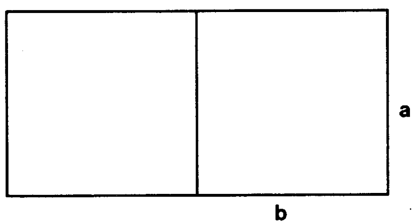


$O_1 = O_2 = 14$ cm $O_3 = O_4 = 16$ cm $O_5 = O_6 = 18$ cm

Úloha č. 8:



Úloha č. 9:



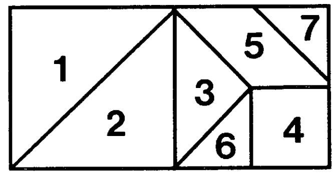
$b = 2a$ $O_1 = 2(a+b) = 30$

$2(a+2a) = 30$

$a = 5$ cm

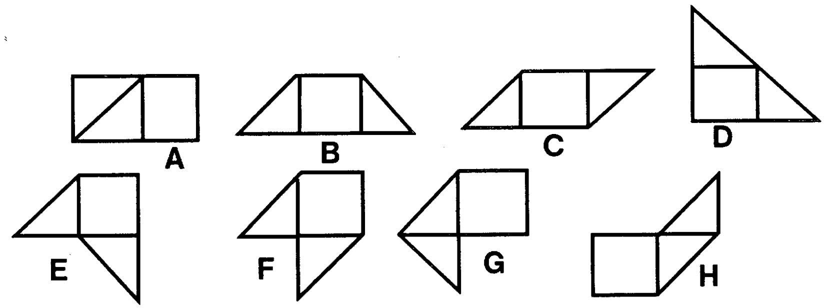
$2 \,.\, O_2 = 2(4a) = 40$

Úloha č. 16:

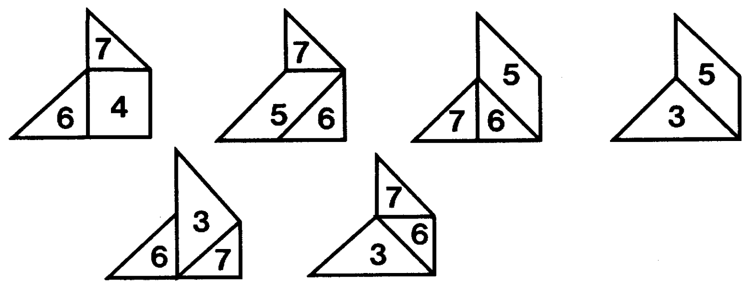


$S_1 = S_2$ $S_3 = S_4 = S_5$ $S_6 = S_7$

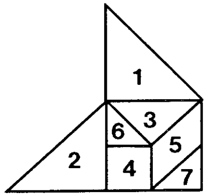
Úloha č. 18:



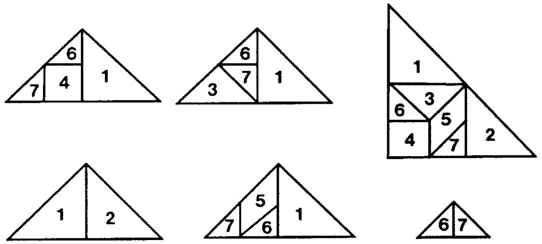
Úloha č. 19:



Úloha č. 20:



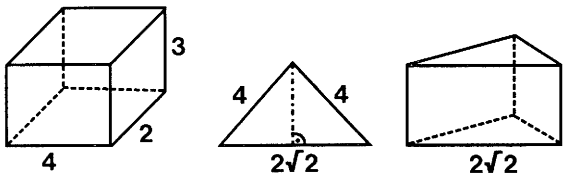
Úloha č. 21:



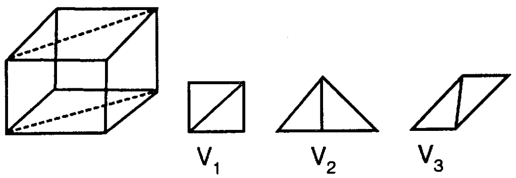
Úloha č. 27:
Rozmery stavebnice Tangram zloženej do tvaru kvádra s obdĺžnikovou podstavou a = 16 cm, b = 8 cm, c = 3 cm.

S_1 = S2 = 145,84 cm^2, $S_3 = S_5$ = 89,94 cm^2,
S_4 = 80 cm^2, $S_6 = S_7$ = 56,92 cm^2.
$V_1 = V_2$ = 96 cm^3 $V_3 = V_4 = V_5$ = 48 cm^3,
$V_6 = V_7$ = 24 cm^3.

Úloha č. 28:



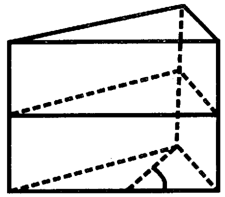
Úloha č. 29:
Hranoly s podstavou tvaru štvorca, trojuholníka, rovnobežníka



Úloha č. 30:
$V_3 = V_4 = V_5$ = 48 cm^3
$V_1 = V_2$ = 96 cm^3
$V_6 = V_7$ = 24 cm^3

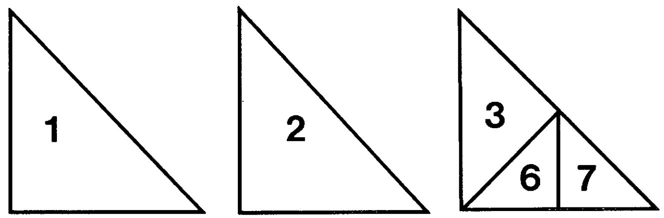
Úloha č. 31:
$V_3 = V_4 = V_5 = 2 . V_6 = 2 . V_7$ = 48 cm^3

Úloha č. 32:
Tvar podstavy pozri (úloha č. 21), ale skladanie vo vrstvách



Úloha č. 33:
$V_6 = V_7$ = 1 m.t.h $V_3 = V_4 = V_5$ = 2 m.t.h
$V_1 = V_2$ = 4 m.t.h

Úloha č. 34:



Úloha č. 35:
v = 6 cm
v = 8 . 8 . 6 = 384 cm^3

Úloha č. 36:

a) Povrch S_1 = 227,68 cm^2
Objem V_1 = 192 cm^3

b) S_2 = 243,68 cm^2
V_2 = 192 cm^3
$S_1 < S_2$
$V_1 = V_2$

Úloha č. 37:

trojboké - 1
štvorboké - 3
päťboké - 1
šesťboké - 3

Úloha č. 38:

$V_1 = V_2$

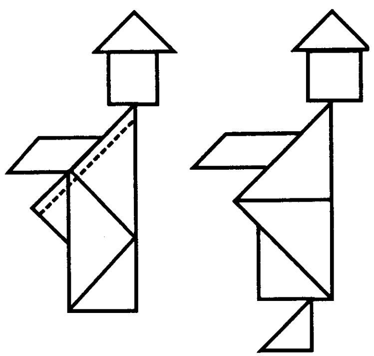
Úloha č. 39:

Ak má kváder podstavu tvaru štvorca, tak jeho povrch je 357,52 cm^2. Ak je podstava tvaru obdĺžnika, tak povrch kvádra sa rovná 400 cm^2. Potrebujeme 4,2 m^2 papiera.

Úloha č. 40:

V_1 = 384 cm^3 = 8 . 16 . 3 cm^3
100 ks .... 38 400 cm^3, 115 % ...... 0,04396 m^3 = 0,044 m^3
1 doska .... 7 500 cm^3
Potrebujeme 6 dosák.

Riešenie paradoxu H. Dudneya



LITERATÚRA:

1. Burjan, V. - Burjanová, Ľ.: Matematické hry. Bratislava, Pytagoras 1992.
2. Cihlář, J. - Zelenka, M.: Matematika pro 5. ročník ZŠ. I. díl, Litvínov, Dialog 1992.
3. Francová, M.: Geometrická představivost. In: Zborník prác PFMU v Brně. 1991.
4. Kárová, V.: Didaktická hra ve vyučování matematiky na 1. stupni ZŠ. In: Zborník Moderné technológie vzdelávania, č. 5, s.203. Nitra, Medacta 1993.
5. Kebza - Kuřina, F. - Půlpán, Z.: O představivosti a její roli v matematice. Praha, Academia 1992.
6. Kuřina, F.: Umění vidět v matematice. Praha, SPN 1989.
7. Levitin, K.: Geometrická rapsodie. Praha, SNTL 1991.
8. Lloyd, S.: The Eighth Book of Tan. 1903.
9. Scharlach, R.: Zur Erhöhrung der geistigen Aktivität der Schüler im Mathematikunterricht durch den Einsatz mathematischer Knobelein. In: Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule, 1990, Heft 2, s. 131 - 146.
10. Šarounová, A.: Rozvíjení geometrické představivosti ve škole. Matematika a fyzika ve škole, 18, 1988, č. 5, s. 346.

Obsah

Autor: RNDr. Jaroslava Brincková
Názov: DIDAKTICKÁ HRA V GEOMETRII
Recenzenti: RNDr. Ladislav Topoľský, RNDr. Anna Michalcová
Vydalo: DONY

Rok vydania: 2003
Repro-Design: LUSKPRESS, Bratislava

ISBN 80-85415-83-6